Lección n°7: Transformaciones naturales.

EPN, 2021

Hemos podido experimentar, en las anteriores lecciones, la versatilidad de la definición de categoría. El funtor resultó, en todo caso, una "aplicación de flechas", haciendo que cada flecha de una categoría tenga una correspondiente flecha en otra categoría. Curiosamente, es posible hablar de una "aplicación de funtores", esto es, una manera de relacionar dos funtores entre si. Aunque el asunto parece abrumador, por aumentar un nivel más de generalidad o abstracción, en realidad este concepto es sumamente útil y necesario.

Definición. *Dados dos funtores $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, entonces una* ***transformación natural*** *es una familia de flechas en $\mathscr{B}$*

$$\alpha_A : F(A) \longrightarrow G(A),$$

donde A corre por todo $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y además, para toda flecha $f : A \to A'$ se cumple que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(A') \arrow[d, "\alpha_{A'}"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(A')
\end{tikzcd}$$

Diremos que α_A son los **componentes** de la transformación natural α. Además, llamaremos al anterior diagrama conmutativo como **diagrama natural** entre los dos funtores. También es usual expresar a la transformación natural por medio del siguiente dibujo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

o de forma más concisa, para resaltar que estamos hablando de una transformacion natural y no de un funtor, escribimos

$$\alpha : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G.$$

Ejemplo 11.4.

- *Para todo funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, existe una transformación identidad $1_F : F \stackrel{\cdot}{\to} F$ definida en cada como componente como $(1_F)_A := 1_{F(A)}$.*
- *Consideremos un grupo G visto como categoría, y dos funtores $S, T : G \to$* **Set***; ya hemos visto que corresponden a conjuntos S, T en donde G actúa por la izquierda. Entonces,*

*una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$ representa lo que se conoce como aplicación **G-equivariante**. El lector puede verificar que, si el diagrama natural conmuta, entonces*

$$\alpha(g \cdot s) = g \cdot \alpha(s)$$

para todo $g \in G$ y $s \in S$.

- *Sea $n \in \mathbb{N}^+$. Consideremos dos funtores M_n, U : **CRing** → **Mon**, donde M_n es el funtor tal que, para un anillo conmutativo R se le asigna $M_n(R)$, el monoide de las matrices $n \times n$ con componentes en R; para un homomorfismo de anillo $f : R \to R'$, se define $M_n(f)$ simplemente aplicando f en cada componente de la matriz. U es en cambio, el funtor olvidadizo que, a cada anillo $(R, +, \cdot)$ le asigna solamente su estructura de monoide $(R, \cdot)$.*

  Ahora, definimos una transformación natural $\det : M_n \dot{\to} U$ *de la siguiente manera. Cada componente* $\det_R : M_n(R) \to U(R)$ *es la función que, a una matriz $A \in M_n(R)$ le asigna su determinante* $\det_R(A)$*; el cual es definido de la manera usual, como se hace en $\mathbb{R}$,pero ahora usando las operaciones de R. Al igual que en el caso real, también se tiene que*

  $$\det_R(AB) = \det_R(A) \cdot \det_R(B) \quad y \quad \det_R(I_n) = 1.$$

  Esto nos dice que $\det_R$ *es un homomorfismo de monoide. La comprobación de que el diagrama natural conmuta se deja como ejercicio.*

Como se muestra en el ejercicio resuelto 9, al final de la lección, para cada par de transformaciones naturales $\sigma : R \dot{\to} S$ y $\tau : S \dot{\to} T$, donde R, S, T son funtores $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$, existe una transformación natural

$$\tau \cdot \sigma : R \dot{\to} T.$$

Con la operación $\cdot$ entre transformaciones naturales, llamada **composición vertical**, se define una categoría $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ (tambien escrita alternativamente como $\mathscr{B}^{\mathscr{A}}$) que tiene como objetos a los funtores $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y que tiene como flechas a las transformaciones naturales entre estos funtores.

Ejemplo 11.5. *Si es que **2** denota a la categoría discreta con 2 elementos, entonces cada funtor $F : \mathbf{2} \to \mathscr{B}$ representa un par de objetos de $\mathscr{B}$. En cambio, una transformación natural $\alpha : F \dot{\to} G$ representa un par de flechas. Esto hace que tengamos un claro isomorfismo $\mathscr{B} \times \mathscr{B} \cong [\mathbf{2}, \mathscr{B}] = \mathscr{B}^{\mathbf{2}}$, justificando, un poco, la notación alternativa.*

Ejemplo 11.6. *Como se había prometido en la anterior lección, veremos que todo límite es esencialmente único. Esto se lo logra viendo que todo límite es un morfismo universal para una categoría adecuada. La categoría de funtores nos da el contexto necesario.*

Sea $D : I \to \mathscr{A}$ un diagrama con forma I para el que asumimos existe su límite. Consideramos la categoría de funtores $[I, \mathscr{A}]$, compuesta por todos los funtores $I \to \mathscr{A}$ y las transformaciones naturales entre ellos. La misma se puede pensar como la categoría de todos los diagramas con forma I.

Adicionalmente, consideramos un funtor, llamado funtor diagonal

$$\Delta : \mathscr{A} \to [I, \mathscr{A}],$$

tal que a cada $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ se le asigna un funtor constante $\Delta(A) : I \to \mathscr{A}$, con $\Delta(A)(i) = A$ para todo $i \in I$. Además, cada flecha $f : A \to A'$ corresponde con un $\Delta(f) : \Delta(A) \dot{\to} \Delta(A')$ transformación natural, definida en cada componente $i \in I$ como $\Delta(f)_i = f$.

Ahora, para el diagrama D, que es elemento de $[I, \mathscr{A}]$, se tiene que un morfismo universal de Δ a D es exactamente su límite. Para ver esto, notemos que tal morfismo universal consta de una dupla

$$(L, p : \Delta(L) \stackrel{\cdot}{\to} D),$$

donde $L \in \mathscr{A}$ y p es una flecha en $[I, \mathscr{A}]$, es decir, una transformación natural. Además, para todo otra transformación natural $f : \Delta(A) \stackrel{\cdot}{\to} D$, se tiene que existe una única flecha $\overline{f} : A \to L$ en $\mathscr{A}$, tal que

$$\begin{tikzcd}
D & \Delta(L) \arrow[l, "p"'] \\
& \Delta(A) \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "F(\overline{f})"']
\end{tikzcd}$$

conmuta, por la definición de morfismo universal.

Sin embargo, la transformación natural p es, en cada componente $i \in \mathrm{ob}(I)$, igual a

$$p_i : L \to D(i),$$

pues $\Delta(L)(i) = L$; además L junto con las flechas p_i forman un cono en D, gracias a la conmutatividad del diagrama natural de la transformación p. De igual manera, la transformación natural f no es otra cosa que un cono en D, dado por A junto con las componentes f_i. Así, L es el objeto límite de D, p_i las respectivas proyecciones; la conmutatividad requerida se deriva del diagrama anterior.

De esta manera tenemos de forma directa, por el teorema 11.2, que:

Teorema 11.7. *Los límites en un categoría son esencialmente únicos.*

12. Isomorfismos naturales

Usualmente en matemática, es demasiado exigente demostrar o buscar que dos objetos de estudio sean iguales, nos basta con que sean isomorfos en algún sentido.

Por consiguiente, es importante caracterizar y entender esta relación en el caso de dos funtores.

Definición. *Si F, $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ son funtores, entonces se dirá que son **isomorfos naturalmente** si es que F y G son isomorfos en la categoría $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$.*

Observación 35. *La razón por la cual se dice isomorfos naturalmente, en lugar de solo isomorfos, es para recalcar que la definición es equivalente, no solo a que $F(A) \cong G(A)$ para todo $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$, sino que además los isomorfismos $\alpha_A : F(A) \to G(A)$ hacen que el diagrama natural conmute.*

Esto es común escribirlo como:

$$F(A) \cong G(A) \qquad \textit{naturalmente.}$$

Ejemplo 12.1. *Sea $\boldsymbol{FVect}_k$, la subcategoría plena de $\mathbf{Vect}_k$, cuyos objetos son todos los espacios vectoriales de dimensión finita. Recordemos que ya se ha definido un funtor contravariante*

$$(-)^* : \boldsymbol{Vect}_k \longrightarrow \boldsymbol{Vect}_k,$$

que envía un espacio vectorial a su dual, por tanto su restricción a $\mathbf{Vect}_k$ *también es un funtor contravariante. Prosiguiendo, definimos el funtor* $(-)^{**}$ *que envía al doble dual de un espacio vectorial, simplemente componiendo* $(-)^*$ *consigo mismo. Es sencillo ver que es un funtor covariante.*

Queremos probar que los funtores $1_{\mathbf{Vect}_k}$ *y* $(-)^{**}$ *son isomorfos naturalmente o, lo que es lo mismo, que para cada espacio vectorial* V*, se tiene que*

$$V \cong V^{**} \qquad \textit{naturalmente.}$$

En efecto, construimos nuestra transformación natural $\alpha : 1_{\mathbf{FVect}_k} \xrightarrow{\cdot} (-)^{**}$ *definiéndola, en cada componente, como la función*

$$\alpha_v : V \to V^{**},$$

que envía v *a una aplicación* $v^{**} \in V^{**}$*, la cual cumple que para cada* $h \in V^*$ *se verifica*

$$\langle v^{**}, h \rangle_{V^{**},V^*} = v^{**}(h) = h(v) = \langle h, v \rangle_{V^*,V}.$$

Justamente, el teorema de representación de Riesz nos dice que estas funciones α_v *son isomorfismos. Basta ahora demostrar la conmutatividad del diagrama natural, que se deja como ejercicio.*

El resultado anterior está muy ligado con el hecho de que, en la construcción del doble dual, no se hacen “elecciones arbitrarias” y, por ejemplo, en cursos de álgebra lineal no es necesario especificar un base de V para encontrar una base V^{**} y demostrar que son de la misma dimensión, cosa que no es posible con la construcción de una base de V^*.

De hecho, también se tiene que $V \cong V^*$ pero, es claro por la definición expuesta, que no es posible que tal isomorfismo sea natural. Aquí la teoría de categorías nos ayuda a justificar nuestras intuiciones, en este caso de que V^{**} es isomorfa a V, pero de forma natural o “canónica”.

13. Equivalencia de categorías

Otro aspecto importante de las transformaciones naturales es que nos dan la noción correcta en **Cat** para considerar a dos categorías como similares, en lugar de usar isomorfismos de categorías.

Definición. *Una categoría* $\mathscr{A}$ *se dice* ***equivalente*** *a una categoría* $\mathscr{B}$*, y se escribe* $\mathscr{A} \simeq \mathscr{B}$*, si es que existen dos funtores* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$*,* $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ *tales que*

$$GF \cong 1_{\mathscr{A}} \quad \textit{en} \quad [\mathscr{A}, \mathscr{A}],$$

$$FG \cong 1_{\mathscr{B}} \quad \textit{en} \quad [\mathscr{B}, \mathscr{B}].$$

Al funtor F *(y también a* G*) se lo llama una* ***equivalencia de categorías****. A* G *se le dice el* ***pseudo-inverso*** *de* F*.*

Observación 36. *Esta condición es más débil que* $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$ *en* ***Cat****, que es equivalente a la existencia de funtores* F *y* G *tal que* $GF = 1_{\mathscr{A}}$ *y* $FG = 1_{\mathscr{B}}$*. Sin embargo, rara vez esto se cumple.*

El ejercicio resuelto 10 es un criterio útil, siempre que se asuma el axioma de elección y se trabaje como lo hemos hecho siempre con categorías pequeñas, para verificar que un funtor es equivalencia, sin tener que encontrar explícitamente un pseudo-inverso.

Usando el mismo ejercicio, es fácil probar el siguiente resultado.

Lema 13.1. *Sea $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ un funtor pleno y fiel, entonces $\mathscr{A}$ es equivalente a una subcategoría plena $\mathscr{A}'$, de $\mathscr{B}$, donde los objetos de $\mathscr{A}'$ son de la forma $F(A)$ con A objeto de $\mathscr{A}$.*

Demostración. $\mathscr{A}'$ es un categoría plena de $\mathscr{A}$. Para ver esto lo único que debemos verificar es que la composición esté bien definida.

Si tenemos $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ con $f, g \in \mathrm{Hom}(\mathscr{A}')$ entonces, por definición, sabemos que existen $f' : X' \to C_1'$, $g : C_2' \to Z'$ con $F(f') = f$, $F(g') = g$, $F(X') = X$, $F(C_1') = F(C_2') = Y$. Ahora, como F es pleno, para la flecha $1_Y \in \mathrm{Hom}F(C_1', C_2')$ existe un $i : C_1' \to C_2'$ tal que $F(i) = 1_Y$. Eso significa que $F(g'if') = gf$, por lo tanto la composición está bien definida. Es una categoría plena porque F es pleno.

La conclusión se deriva usando el ejercicio resuelto 10, con el funtor $F' : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$, dado por $F'(A) = F(A)$; este funtor es pleno, fiel y sobreyectivo en objetos, lo cual es más que suficiente, pues solo se necesita que sea esencialmente sobreyectivo en objetos. $\square$

Ejemplo 13.1. *En cualquier categoría $\mathscr{A}$, la relación de isomorfismo $\cong$ entre objetos es una relación de equivalencia.*

Consecuentemente, podemos partir al conjunto $\mathrm{ob}(\mathscr{A})$ por esta relación. Ahora, asumiendo el axioma de elección, podemos tomar un elemento de cada clase; eso define una categoría $\mathscr{A}/\cong$, en donde los objetos son los objetos elegidos o los representantes de cada clase de equivalencia, y se declara para par de objetos A, B que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/\cong}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B).$$

De esta manera, por construcción, es un subcategoría plena de $\mathscr{A}$.

En general, entenderemos por un ***esqueleto*** *de $\mathscr{A}$ como una subcategoría plena tal que su funtor inclusión es esencialmente sobreyectivo y además ningún objeto es isomorfo a otro.*

Es así que hemos probado (de nuevo asumiendo el axioma de elección y trabajando en categorías pequeñas), que toda categoría tiene al menos un esqueleto, ya que $\mathscr{A}/\cong$ cumple con la definición. El lector puede comprobar que todos los esqueletos de una categoría son isomorfos entre sí.

Adicionalmente, se tiene que $A/\cong$ (y por tanto, todos los otros esqueletos) es equivalente a A (aunque es claro que en general no tiene por que ser isomorfo). Basta considerar el funtor inclusión $\mathscr{A}/\cong \to \mathscr{A}$ y usar el lema anterior.

$\mathscr{A}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr] & B \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \\
C \arrow[r, bend left, "h"] & D \arrow[l, bend left, "h^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{A}/\cong$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \\
C
\end{tikzcd}$$

Un esqueleto de una categoría.

Las equivalencias también nos permiten justificar algunas cuestiones que se han mencionado.

Ejemplo 13.2. *Consideramos $\mathscr{C}$, la subcategoría plena de **Cat**, compuesta por todo las categorías con un solo objeto; entonces se tiene que*

$$\mathscr{C} \simeq \boldsymbol{Mon},$$

lo cual era lo expresado cuando se decía que todo monoide se puede ver como una categoría de un solo elemento.

En efecto, notemos que un objeto A en cualquier categoría cumple que $\mathrm{Hom}(A, A)$ es un monoide bajo de la operación composición.

*Así, definimos $F : \mathscr{C} \to \boldsymbol{Mon}$ que asigna a un objeto C al monoide $\mathrm{Hom}(C, C)$ y para una flecha $f : C \to C'$, que es en realidad un transformación natural en **Cat**, le asigna una flecha*

$$F(f) : \mathrm{Hom}(C, C) \to \mathrm{Hom}(C', C'),$$

con $F(f)g = f(g) \in \mathrm{Hom}(C') = \mathrm{Hom}(C', C')$. La última igualdad se satisface porque la categoría solo tiene un objeto.

Se verifica que este funtor es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos. Por tanto, es una equivalencia.

*De manera similar, **Grp** y **Ring** son equivalentes a subcategorías de **Cat** que consisten de categorías con un solo elemento y algunas propiedades impuestas en sus respectivas flechas.*

Ejemplo 13.3. *Consideramos $\boldsymbol{Ord}_{fin}$, la categoría de los números ordinales finitos, en el sentido de Von Neumann. Esto es, los objetos son $0, 1, 2, \ldots$ donde $0 = \varnothing$, $1 = \varnothing \cup \{\varnothing\}$ y, por inducción, $n = (n-1) \cup \{n-1\}$, es decir*

$$n = \{0, 1, \ldots, n-1\},$$

las flechas serán todas las funciones entre estos conjuntos.

*Prosiguiendo, consideramos la subcategoría plena de **Set** que tiene como objetos a los conjuntos finitos; lo llamamos $\boldsymbol{Set}_{fin}$, entonces se tiene que*

$$\mathbf{Set}_{fin} \simeq \mathbf{Ord}_{fin}.$$

En efecto, para todo conjunto finito A, le corresponde un único ordinal finito $|A|$ que es su cardinalidad o número de elementos.

Más aún, si en cada conjunto A enumeramos a sus elementos, por ejemplo poniendo $A = \{x_0, \ldots x_{n-1}\}$, con $n = |A|$, entonces existen isomorfismos

$$i_A : A \to |A|,$$

con $i_A(x_j) = j$ para $j = 0, \ldots, n-1$.

Tenemos el funtor

$$F : \mathbf{Set}_{fin} \to \mathbf{Ord}_{fin},$$

con $F(A) = |A|$ para todo objeto y para toda flecha $f : A \to B$ le asignamos $F(f) : |A| \to |B|$ definida por

$$F(f) = i_B \circ f \circ (i_A)^{-1}.$$

Es fácil comprobar que esto define un funtor, más aún es fiel y pleno, porque si tenemos

$$F(f) = F(g) \in \mathrm{Hom}(|A|, |B|),$$

entonces se tiene que

$$i_B \circ f \circ (i_A)^{-1} = i_B \circ g \circ (i_A)^{-1},$$

luego $f = g \in \mathrm{Hom}(A, B)$*. Es pleno porque si tenemos* $f \in \mathrm{Hom}(|A|, |B|)$*, entonces podemos tomar* $h \in \mathrm{Hom}(A, B)$ *tal que* $h(x_j) = x_{f(j)}$ *para* $j = 0, \ldots, n-1$ *y* $A = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$*; luego* $F(h) = f$.

Finalmente, es esencialmente sobreyectivo porque para cada ordinal finito n*, existe al menos un conjunto* A *tal que* $|A| = n$*. Esto prueba entonces que tenemos una equivalencia.*

De manera alternativa, podíamos haber probado lo anterior, demostrando que la categoría $\boldsymbol{Set}_{fin}$ *tiene como un esqueleto a* $\boldsymbol{Ord}_{fin}$.

Sin embargo, notamos que no podemos tener que ambas categorías son isomorfas pues nuestro funtor F *no tiene inverso, porque para una cardinalidad* n *existen infinitos* A *con* $|A| = n$*, y para que un funtor tenga inverso, necesita ser biyectivo en objetos.*

Ejemplo 13.4. *Consideramos un conjunto* I *visto como categoría discreta, y la categoría de funtores* $\boldsymbol{Set}^I$*. Entonces la misma puede verse como una categoría, que tiene conjuntos indexados por* I*, como objetos.*

Para probar esto, observemos que los funtores $A : I \to \boldsymbol{Set}$ *determinan una única familia* $(A_i)_{i\in I}$*, con* $(A_j) = A(j)$ *para todo* $j \in I$*. Notemos que no hay flechas en la categoría* I *que no sean la identidad, por lo tanto los elementos* A_j *son todos los objetos que determina el funtor* A.

De manera similar, una transformación natural $f : A \to B$ *entre dos funtores no es más que una familia de funciones*

$$(f_i)_{i\in I},$$

donde $f_j : A_j \to B_j$.

Ahora, se tiene que

$$\boldsymbol{Set}^I \simeq \boldsymbol{Set}/I.$$

Para probarlo, definimos

$$F : \boldsymbol{Set}^I \to \boldsymbol{Set}/I,$$

$$G : \boldsymbol{Set}^I \to \boldsymbol{Set}/I,$$

en objetos, como

$$F(A) = F((A_i)_{i\in I}) = \pi_A,$$

donde $\pi_A : \bigcup_{i\in I} A_i \to I$*, tal que a cada* (x_j) *se le asigna su índice* $j \in I$*. Para una flecha* f*,* π_f *se define de forma análoga.*

Ahora, para el otro funtor escribimos

$$G(l) = (l^{-1}(i))_{i\in I},$$

para todo $l : X \to I \ \in \boldsymbol{Set}/I$.

Se deja al lector verificar que $G \circ F \cong 1_{\boldsymbol{Set}^I}$ *y* $F \circ G \cong 1_{\boldsymbol{Set}/I}$ *aunque, como en el ejemplo anterior, no cumplen con ser funtores inversos.*

Definición. *Si $\mathscr{A}^{op} \simeq \mathscr{B}$ diremos que $\mathscr{A}$ es dualmente equivalente a $\mathscr{B}$ o, de forma más breve, que $\mathscr{A}$ es **dual** a $\mathscr{B}$.*

Ejemplo 13.5. *Algunos ejemplos más que daremos a contiuación, no los demostraremos y resultan casos importantes de equivalencias o dualidades. Las demostraciones, en general, son teoremas vistos en cursos estándar de matemática universitaria, y que pueden ser recogidos todos en este contexto.*

- *Fijando un campo k, se sabe que $\boldsymbol{Mat}_k$, la categoría de matrices con coeficientes en k, es equivalente a $\boldsymbol{Vect}_k^{fin}$ la categoría de espacios vectoriales de dimensión finita.*

  Este resultado es el que nos permite identificar, en álgebra lineal, cada aplicación lineal con una matriz, y viceversa, aunque tal representación no es única y depende de una base.

- *Dualidad de Gelfand-Naimark: La categoría de C^*-álgebras conmutativas unitarias es dual a la categoría de espacios de Haussford compactos.*

  Este resultado es de especial interés, ya que trae consecuencias para el análisis matemático. En particular, implica el teorema del cálculo funcional continuo, el cual permite aplicar funciones continuas a operadores lineales normales acotados, en espacios de Hilbert.

- *Dualidad de Pontryagin: La categoría de grupos topológicos localmente compactos y abelianos es dual a sí misma.*

  La dualidad de Pontryagin ayuda a definir la transformada de Fourier y la operación de convolución, no solo en $\mathbb{R}^n$, sino en todos los grupos topológicos localmente compactos y abelianos.

14. 2-categorías

Hemos observado que, entre dos transformaciones naturales α y β que tienen el mismo dominio y codominio, existe una operación "vertical" que produce una transformación natural $\alpha \cdot \beta$.

Sin embargo (véase ejercicio resuelto 9), se tiene que existe otra operación $\circ$ tal que si τ, τ' son transformaciones naturales, dispuestas de la siguiente forma:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "S'"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau'"] & \mathscr{A} \end{tikzcd}$$

entonces existe una composición horizontal

$$\tau' \circ \tau : S' \circ S \longrightarrow T' \circ T.$$

Más aún, se cumple una "ley de intercambio"

$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma).$$

para todas las transformaciones naturales $\sigma : R \stackrel{\cdot}{\to} S$, $\sigma' : R' \stackrel{\cdot}{\to} S'$.

Es así como **Cat** es el prototipo para un tipo de categoría, con estructura más rica, con más de un tipo de objeto, flecha y con al menos dos formas de composición. Siendo más específicos:

Definición. *Una* ***categoría doble*** *es una categoría $\mathscr{A}$ que, adicionalmente, posee una clase* $2\mathrm{Hom}(\mathscr{A})$ *de* $2-$***morfismos****. Estos* $2-$*morfismos tienen definido un dominio y un codominio en* $\mathrm{Hom}(\mathscr{A})$*.*

Además, para cada par de objetos A, B existe una categoría $2\mathrm{Hom}(A, B)$ que tienen como objetos a todas las flechas $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$, y como flechas tendrá a los 2-morfismos.

Notamos $F : f \dot{\to} g$ para referirnos a un 2-morfismo con dominio f y codominio g. La operación en todas estas categorías $2\mathrm{Hom}(A, B)$ se llamará composición vertical y se notará por el símbolo "$\cdot$".

Adicionalmente, se satisface que

- *Para cada tripleta de objetos A, B, C existe un bifuntor*
$$\circ : (2\mathrm{Hom}(B, C)) \times (2\mathrm{Hom}(A, B)) \to (2\mathrm{Hom}(A, C)),$$
al que conocemos como composición horizontal y a la imagen de dos 2-morfismos, la notamos por $g \circ f$.

- *Se cumple la siguiente igualdad, llamada ley de intercambio*
$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma).$$

Finalmente, una $2-$***categoría*** *es una categoría doble tal que las 2-flechas identidades para la operación $\cdot$, lo son también para la operación $\circ$; esto quiere decir que, si*
$$1_f \cdot G = G \cdot 1_f = G,$$
con $1_f : f \dot{\to} f$, $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ y para todo $G : f \dot{\to} f$, entonces también se debe tener que
$$1_f \circ G = G \circ 1_f = G.$$

Ejemplo 14.1. *Como ejemplo inmediato, tenemos que* ***Cat*** *es un categoría doble, en donde los 2-morfismos son las transformaciones naturales, armadas de las operaciones $\cdot$, $\circ$ ya definidas.*

Por otro lado, el lector puede probar que las identidades se preservan, de tal manera que ***Cat*** *es una* $2-$*categoría.*

Una aplicación de estos conceptos lo veremos en la siguiente lección.

Ejercicio resuelto 7

Si B y C son grupos (vistos como categorías de un solo objeto) y $S, T : B \to C$ homomorfismos de grupo (vistos como funtores), muestre que existe una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$ si y solo si existe un $h \in C$ tal que $Tg = hS(g)h^{-1}$ para todo $g \in B$.

Demostración. Supongamos que existe una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$. Dado que B, como categoría, tiene un solo elemento esto significa que existe una flecha $h : F(e_B) \to F(e_B)$, donde e_B es este único elemento y tal que para cada flecha $g : e_B \to e_B$ se cumple que

$$\begin{tikzcd}
S(e_B) \arrow[r, "S(g)"] \arrow[d, "h"'] & S(e_B) \arrow[d, "h"] \\
T(e_B) \arrow[r, "T(g)"'] & T(e_B)
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero entonces $T(g) = hS(g)h^{-1}$ para toda flecha $g : e_B \to e_B$, pero como las flechas de los grupos vistos como categorías son en realidad los elementos del grupo obtenemos lo requerido ya que así $h \in C$ y $g \in B$.

La otra dirección es análoga donde hacemos que $h \in C$ sea la única función $h; F(e_B) \to F(e_B)$ que represente a la transformación natural α, que estará bien definida porque el diagrama correspondiente también conmutará. □

Ejercicio resuelto 8

Si $\mathscr{C}$ es un categoría y $\mathscr{P}$ es un preorden visto como categoría, entonces para dos funtores $S, T : \mathscr{C} \to \mathscr{P}$ existe una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$ si y solo si $S(c) \leqslant T(c)$ para todo $c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$.

Demostración. Suponemos primero que existe una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$, esto es una familia de flechas

$$\{\alpha_c : S(c) \to T(c)\}_{c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})},$$

tal que para cada $f : c \to c'$ el siguiente diagrama en $\mathscr{P}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
S(c) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\alpha_c"'] & S(c') \arrow[d, "\alpha_{c'}"] \\
T(c) \arrow[r, "T(f)"'] & T(c')
\end{tikzcd}$$

Ahora, como $\mathscr{P}$ es un preorden, entonces existe una flecha $f : a \to b$ si y solo si $a \leqslant b$. Por lo tanto, la existencia de las flechas α_c implica que $S(c) \leqslant T(c)$, y la condición del diagrama conmutativo es trivial.

Ahora, para el converso supongamos que $S(c) \leqslant T(c)$ para todo $c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$, entonces por lo dicho antes esto es equivalente a que existan flechas $\alpha_c : S(c) \to T(c)$ que definen una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} T$, porque el diagrama requerido conmuta pues en un preorden existe a lo más una flecha entre cada par de objetos (son categorías delgadas).

□

Ejercicio resuelto 9

El siguiente ejercicio nos introducirá a las $2-$categorías, realizamos los siguiente pasos:

(1) Sean $R, S, T : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ funtores y sean $\sigma : R \dot{\to} S$, $\tau : S \dot{\to} T$ transformaciones naturales, muestre que existe una transformación natural

$$\tau \cdot \sigma : R \dot{\longrightarrow} T,$$

construida de manera "natural".

(2) Defina $\mathscr{B}^{\mathscr{C}} = [\mathscr{C}, \mathscr{B}]$ como la categoría que tiene como objetos a los funtores $T : \mathscr{C} \to \mathscr{B}$ y como flechas a las transformaciones naturales armadas de la operación composición descrita en (1). Ejemplo: Si K es un anillo conmutativo y G es un grupo entonces $(\mathbf{Mod}_K)^G$ es la categoría de las $K-$representaciones sobre G.

(3) Dado el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "S"] \arrow[r, bend right=50, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=50, "S'"] \arrow[r, bend right=50, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau'"] & \mathscr{A}
\end{tikzcd}$$

donde $\tau : S \dot{\to} T$, $\tau' : S' \dot{\to} T'$ son transformaciones naturales. Defina una transformación natural

$$\tau' \circ \tau : S' \circ S \longrightarrow T' \circ T,$$

de manera que se verifique la igualdad

$$(\tau' \cdot \sigma') \circ (\tau \cdot \sigma) = (\tau' \circ \tau) \cdot (\sigma' \circ \sigma),$$

para todas las transformaciones naturales $\sigma : R \dot{\to} S$, $\sigma' : R' \dot{\to} S'$.

Demostración.

(1) Escribimos a las transformaciones naturales como

$$\sigma = \{\sigma_c : R(c) \to S(c)\}_{c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})},$$

$$\tau = \{\tau_c : S(c) \to T(c)\}_{c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})}.$$

Ahora, correspondientemente, por la definición de transformación natural tenemos que, para cada $f : c \to c' \in \mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd}
R(c) \arrow[r, "R(f)"] \arrow[d, "\sigma_c"] & R(c') \arrow[d, "\sigma_{c'}"] \\
S(c) \arrow[r, "S(f)"'] & S(c')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S(c) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\tau_c"] & S(c') \arrow[d, "\tau_{c'}"] \\
T(c) \arrow[r, "T(f)"'] & T(c')
\end{tikzcd}$$

de donde, obtenemos que el siguiente diagrama también conmuta

$$\begin{tikzcd}
R(c) \arrow[r, "R(f)"] \arrow[d, "\tau_c \cdot \sigma_c"'] & R(c') \arrow[d, "\tau_{c'} \cdot \sigma_{c'}"] \\
T(c) \arrow[r, "T(f)"'] & T(c')
\end{tikzcd}$$

donde $\tau_c \cdot \sigma_c$ es la composición de flechas, por lo tanto la familia de flechas

$$\tau \cdot \sigma = \{\tau_c \cdot \sigma_c : R(c) \to T(c)\}_{c \in \mathrm{ob}\mathscr{C}}$$

define una transformación natural.

(2) Por lo hecho en el anterior numeral, tenemos la operación "$\cdot$" para todos los funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{B}$, entre dos categorías. Estos funtores, definen una categoría $[\mathscr{C}, \mathscr{B}]$, con la operación

"$\cdot$", ya que es sencillo ver que 1_F es la flecha identidad para esta operación, para todo F en $[\mathscr{C}, \mathscr{B}]$. De manera similar, se tiene la asociatividad requerida.

Explorando un poco más el ejemplo, como se estudió en las primeras lecciones, un funtor $F : G \to \mathbf{Mod}_K$ cualquiera, donde G es un grupo visto como categoría de un solo elemento $\bullet$, es una $K-$representación sobre G. Aquí G es representado por el $K-$módulo definido por $F(\bullet)$.

(3) Definimos, para las transformaciones naturales σ y σ', su composición horizontal, dada por la familia de flechas

$$\tau' \circ \tau = \{d_c : S'(S(c)) \to T'(T(c))\}_{c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})},$$

donde la flecha d_c se construye de la siguiente manera:

Como tenemos la transformación natural

$$\tau' = \{\tau'_b : S'(b) \to T'(b)\}_{b \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})},$$

entonces para todo $f : b \to b'$ flecha de $\mathscr{B}$

$$\begin{tikzcd} S'(b) \arrow[r, "S'(f)"] \arrow[d, "\tau'_b"'] & S'(b') \arrow[d, "\tau'_{b'}"] \\ T'(b) \arrow[r, "T'(f)"'] & T'(b') \end{tikzcd}$$

(1)

conmuta. Ahora en particular en lo anterior podemos tomar $b = S(c)$, $b' = T(c)$ con $c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$ y $f = \tau_c$. De tal forma que podemos definir

$$d_c = T'(\tau_c) \cdot \tau'_{S(c)} = \tau'_{T(c)} \cdot S'(\tau_c) \qquad (2)$$

y escribimos $\tau'_c \circ \tau_c := d_c$. Ahora, para que $\tau' \circ \tau$ sea una transformación natural, se tiene que cumplir que para todo $f : c \to c'$, el diagrama siguiente conmuta

$$\begin{tikzcd} S'(S(c)) \arrow[r, "S'(S(f))"] \arrow[d, "\tau'_c \circ \tau_c"'] & S'(S(c')) \arrow[d, "\tau'_{c'} \circ \tau_{c'}"] \\ T'(T(c)) \arrow[r, "T'(T(f))"] & T'(T(c')) \end{tikzcd}$$

En efecto, esto se cumple pues para cada $f : c \to c'$ los siguientes diagramas sí conmutan

$$\begin{tikzcd} S'(T(c)) \arrow[r, "S'(T(f))"] \arrow[d, "\tau'_{T(c)}"'] & S'(T(c')) \arrow[d, "\tau'_{T(c')}"] \\ T'(T(c)) \arrow[r, "T'(T(f))"] & T'(T(c')) \end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd} S'(S(c)) \arrow[r, "S'(S(f))"] \arrow[d, "S'(\tau_c)"'] & S'(S(c')) \arrow[d, "S'(\tau_{c'})"] \\ S'(T(c)) \arrow[r, "S'(T(f))"] & S'(T(c')) \end{tikzcd}$$

(4)

(3) conmuta usando (1) y en cambio (4) lo hace porque es la imagen a través del funtor S' de un diagrama conmutativo. Luego, juntando ambos diagramas y usando (2) obtenemos lo requerido.

Ahora, como hemos obtenido que $\tau' \circ \tau$ es una transformación natural debemos finalmente probar que para todo $c \in \mathrm{ob}(\mathscr{C})$ se obtiene la igualdad

$$(\tau'_c \cdot \sigma'_c) \circ (\tau_c \cdot \sigma_c) = (\tau'_c \circ \tau_c) \cdot (\sigma'_c \circ \sigma_c).$$

En efecto, primero notemos que

$$\begin{aligned}(\tau'_c \cdot \sigma'_c) \circ (\tau_c \cdot \sigma_c) =& (T'(\tau \cdot \sigma)_c) \cdot ((\tau' \cdot \sigma')_{R(c)}) \\ =& T'(\tau_c) \cdot T'(\sigma_c) \cdot \tau'_{R(c)} \cdot \sigma'_{R(c)}.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(\tau'_c \circ \tau_c) \cdot (\sigma'_c \circ \sigma_c) = (T'(\sigma_c) \cdot \tau'_{S(c)}) \cdot (S'(\sigma_c) \cdot \sigma'_{R(c)}).$$

Por tanto, tendremos la igualdad de ambas expresiones si es que $\tau'_{S(c)} \cdot S'(\sigma_c) = T'(\sigma_c) \cdot \tau'_{R(c)}$, lo cual se verifica usando (1) con $b = R(c)$, $b' = S(c)$ y $f = \sigma_c$.

□

Ejercicio resuelto 10

Un funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ es una equivalencia si y solo si es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos (asumir el axioma de elección).

Demostración. Como F es una equivalencia entonces existe un funtor $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ tal que $1_{\mathscr{A}} \cong GF$ y $1_{\mathscr{B}} \cong FG$. Esto es lo mismo a tener transformaciones naturales

$$\eta : 1_{\mathscr{A}} \dot{\to} GF, \quad \epsilon : FG \dot{\to} 1_{\mathscr{B}}.$$

Ahora, para cada $B \in \mathscr{B}$ se tiene que

$$\epsilon_B : (FG)(B) \to B$$

es un isomorfismo, pues ϵ es un isomorfismo en la categoría $[\mathscr{B}, \mathscr{B}]$. Más aún, esto implica que F es esencialmente sobreyectivo en objetos, pues podemos tomar $A = G(B)$ y así $F(A) \cong B$.

Para probar que es fiel, tomemos $f, f' \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(A, A')$ tales que $F(f) = F(f')$, entonces $\eta_A \circ f = GFf \circ \eta_A$ porque el diagrama de naturalidad de η conmuta. Luego

$$\eta_A \circ f = GFf' \circ \eta_{A'} = \eta_{A'} \circ f' \tag{1}$$

por el mismo argumento. Como $\eta_{A'}$ es un isomorfismo, entonces es monomorfismo, de donde obtenemos que $f = f'$.

Para probar que es pleno, tomamos cualquier $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A'))$ y definimos una flecha $g : A \to A'$ como

$$g = \eta_{A'}^{-1} \circ Gh \circ \eta_A, \tag{2}$$

entonces se debe comprobar que $F(g) = h$. Para ello se observa que, como G es también una equivalencia, ya sabemos que debe ser fiel, así si probamos que $GF(g) = G(h)$ tendremos los requerido. En efecto, primero aplicando el funtor GF en (2) tenemos que

$$GF(g) = GF(\eta_{A'})^{-1} \circ GFG(h) \circ GF(\eta_A).$$

No es difícil probar usando la conmutatividad del diagrama natural de η obtener que

$$GF\eta_A = \eta_{GF(A)}$$

y

$$GF\eta_{A'} = \eta_{GF(A')},$$

luego

$$GF(g) = (\eta_{GF(A')})^{-1} \circ GFG(h) \circ \eta_{GF(A)}.$$

Ahora, aplicando la conmutatividad del diagrama natural de η, a la flecha $Gh : GF(A) \to GF(A')$, se obtiene que

$$GFG(h) \circ \eta_{GF(A)} = \eta_{GF(A')} \circ G(h),$$

de donde

$$GF(h) = G(h)$$

y podemos concluir.

Para la otra dirección, supongamos que F es fiel, pleno y esencialmente sobreyectivo en objetos. Ahora, para cada $B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})$ sabemos que

$$\{A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A}) \ : \ F(A) \cong B\}$$

es no vacío, así por el axioma de elección obtenemos una función $G : \mathrm{ob}(\mathscr{B}) \to \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ la cual cumple con que $F(G(B)) \cong B$ y además notamos a este isomorfismo como

$$\epsilon_B : F(G(B)) \to B$$

En cambio, para cada flecha $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B')$ consideramos ,de forma auxiliar, la flecha

$$\epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B : F(G(B)) \to F(G(B')).$$

y como F es fiel y pleno, entonces existe un único $f : G(B) \to G(B')$ tal que $F(f) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$. A f lo llamaremos $G(g)$. Así hemos definido también G en las flechas, no es difícil ver que esto en efecto determina un funtor. Es importante notar que, por la forma en la cual lo hemos construido, $G(g)$ es la única flecha que hace que el siguiente diagrama conmute.

$$\begin{tikzcd}
F(G(B)) \arrow[r, "F(G(g))"] \arrow[d, "\epsilon_B"'] & F(G(B')) \arrow[d, "\epsilon_{B'}"] \\
B \arrow[r, "g"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Lo anterior muestra que ϵ, definido por la familia $\{\epsilon_B\}_{B \in \mathrm{ob}(\mathscr{B})}$, es una transformación natural

$$F \circ G \dot{\to} 1_{\mathscr{B}}.$$

El hecho de que los ϵ_B sean isomorfismos, implica que ϵ es un isomorfismo natural. Falta entonces solamente encontrar un isomorfismo natural $\eta : 1_{\mathscr{A}} \dot{\to} G \circ F$. Para ello, sea $A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})$ y notemos que $\epsilon^{-1}_{F(A)} : F(A) \to (F \circ G \circ F)(A)$ es obviamente un isomorfismo. Ahora, como F es fiel y pleno, existe una única flecha, a la cual llamaremos

$$\eta_A : A \to (G \circ F)(A)$$

tal que $F(\eta_A) = \epsilon^{-1}_{F(A)}$. La flecha η_A debe ser un isomorfismo, para ello, notemos que existe una única flecha $h : (G \circ F)(A) \to A$ tal que $F(h) = (\epsilon^{-1}_{F(A)})^{-1} = \epsilon_{F(A)}$ pero entonces

$$1_{F(A)} = F(h)F(\eta_A) = F(h \circ \eta_A)$$

como F es fiel entonces se tiene que $h \circ \eta_A = 1_A$; de manera similar $\eta_A \circ h = 1_{GF(A)}$, por tanto $h = (\eta_A)^{-1}$.

Como todos los η_A resultaron ser isomorfismos, para que η, definida por la familia $\{\eta_A\}_{A \in \mathrm{ob}(\mathscr{A})}$, sea un isomorfismo natural basta con ver la conmutatividad del diagrama natural

$$\begin{tikzcd}
G(F(A)) \arrow[r, "G(F(f))"] & G(F(A')) \\
A \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[r, "f"'] & A' \arrow[u, "\eta_{A'}"']
\end{tikzcd}$$

Para ello, observemos que como ϵ es isomorfismo natural, entonces ϵ^{-1} también lo es. Luego, el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
F(G(F(A))) \arrow[r, "F(G(F(f)))"] & G(F(A')) \\
F(A) \arrow[u, "\epsilon^{-1}_{F(A)}"] \arrow[r, "F(f)"'] & F(A') \arrow[u, "\epsilon^{-1}_{F(A')}"']
\end{tikzcd}$$

Pero esta es precisamente la imagen, a través de F, del diagrama conmutativo requerido. Finalmente, como F es fiel, concluimos. $\square$